

Storia dei numeri naturali

Le origini del numero

I numeri naturali (a parte lo zero) esistono da sempre, in quanto il concetto di numero è innato nell'uomo: tutti gli esseri umani (ed anche alcuni animali) possiedono per loro natura il concetto di numero. Infatti si è visto che in tutte le civiltà, anche le più primitive, è presente il concetto di numero. A tal proposito sono stati ritrovati reperti storici (i più antichi risalgono anche a 30000 anni fa), come ad esempio ossa di animale, su cui sono incise diverse tacche. Ciò significa che gli uomini primitivi usavano fare incisioni su oggetti, per contare, ad esempio, i loro animali.

Rispondi alle seguenti domande: Quando sono stati inventati i numeri naturali? Quali sono le prove che attestano che i numeri si conoscono fin dalla preistoria?

Il sistema posizionale e il numero zero

A partire dal VII secolo d.C., tra gli indiani¹ e poi tra gli arabi si hanno le prime testimonianze scritte dell'uso del numero zero e del nostro metodo per poter scrivere i numeri, ossia di scrivere i numeri mediante l'uso di solamente 10 simboli (equivalenti ai nostri {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}) dove ciascun simbolo assume un diverso significato a seconda della posizione che prende nella scrittura del numero. Consideriamo ad esempio le rappresentazioni "123" e "312"; esse indicano due numeri diversi perché i simboli "1", "2" e "3" occupano una *posizione* differente. Ecco perché il nostro sistema di rappresentazione dei numeri è detto **sistema decimale posizionale** (detto anche sistema indo-arabico).

Rispondi alle seguenti domande: Quando è nato il numero zero e da quale popolazione è stato inventato? Cosa si intende con "sistema decimale posizionale"? Come è altrimenti detto il "sistema decimale posizionale"? Qual è il nome del matematico che con i suoi scritti ci ha tramandato le prime testimonianze dello zero? Cos'altro ci ha tramandato questo matematico?

Il numero zero e l'anno zero

Il mondo occidentale importò il sistema decimale posizionale (e quindi lo zero) dagli arabi a partire dall'anno 1000 e più ancora nel 13° secolo. Prima di allora in occidente non si sapeva cosa fosse il numero zero, quindi è da tener presente che l'anno di nascita di Cristo non è l'anno zero, ma l'anno 1 e nel conto degli anni si passa direttamente dall'1 a.C. all'1 d.C.².

Rispondi alle seguenti domande: Quando il mondo occidentale cominciò ad importare il sistema decimale posizionale? Il fatto che il numero zero sia stato tramandato agli occidentali diversi secoli dopo la nascita di Cristo ha delle conseguenze nel nostro modo di contare gli anni? Quando è stato stabilito il nostro modo di contare gli anni e da chi?

Diffusione del sistema di numerazione decimale posizionale

Il primo che tentò di diffondere nella cultura occidentale il sistema di numerazione decimale posizionale fu il monaco francese Gerberto (940 circa - 1003) che divenne **PAPA SILVESTRO II** (egli era anche un matematico e scrisse diversi trattati di aritmetica e di geometria), ma questo sistema inizialmente non ebbe successo. Solamente a partire dal **13° secolo**, molti matematici che vennero a contatto con la cultura araba cominciarono a diffondere il sistema indo-arabico, tra i quali il più

¹ Il matematico e astronomo indiano **BRAHMAGUPTA** (598 d.C.– 668) ci ha lasciato un suo scritto che costituisce la fonte più antica conosciuta, eccettuato il sistema di numerazione maya, a trattare lo zero come un vero e proprio numero. Inoltre enuncia le regole dell'aritmetica sui numeri negativi e sullo zero, molto simili alle regole nostre.

² Il nostro modo di contare gli anni è dovuto al monaco Dionigi il Piccolo, il quale, intorno al 523, calcolò che l'anno 1 dell'era cristiana era quello che iniziava la settimana dopo il 25 dicembre dell'anno 753 dalla fondazione di Roma. Il calcolo di Dionigi era quasi certamente sbagliato, infatti, essendo Erode (colui il quale provocò la strage degli innocenti) morto nell'anno 4 a.C., la nascita di Gesù dovrebbe essere anteriore a quest'anno. Quindi Gesù molto probabilmente è nato qualche anno prima dell'anno 1, tuttavia, nonostante questo probabile errore, il conteggio degli anni è rimasto invariato.

eminente fu **LEONARDO PISANO**, più noto come **FIBONACCI**³ (1180 circa - 1250). Egli nella sua opera "Liber abbaci" fece conoscere il sistema indo-arabico ed il numero zero, in arabo chiamato "sifr", che tradusse con il termine latino "zephirum"⁴. Da "sifr" derivò il termine "cifra" e da "zephirum" derivò il termine "zevero" che poi si trasformò in "zero".

Fino al 16° secolo il sistema indo-arabico si diffondeva con grande fatica, probabilmente perché molti matematici non ne sentivano l'esigenza, visto che le quattro operazioni venivano effettuate con l'abaco e non con carta e penna come facciamo noi. Addirittura nel 1280 a Firenze questo sistema fu vietato dai banchieri, in quanto, a loro dire, le cifre potevano essere facilmente manomesse e, inoltre, si pensava che questo sistema venisse usato per trasmettere messaggi segreti; poiché all'epoca questo sistema era chiamato "cifra", da allora è nato l'uso di denominare con "messaggio cifrato" un messaggio scritto con un codice segreto.

Solo nel **16° secolo** il sistema indo-arabico fu definitivamente introdotto nell'Europa occidentale.

Rispondi alle seguenti domande: Chi fu il primo che tentò di diffondere nella cultura occidentale il sistema di numerazione decimale e quando? Quando è che il sistema posizionale cominciò realmente a diffondersi? Chi fu il più grande matematico che diede un notevole impulso alla diffusione nel mondo occidentale del sistema decimale posizionale? Chi fu Fibonacci per cosa è famoso? Qual è l'etimologia del termine "zero"? Perché il sistema indo-arabico si diffuse con difficoltà? Quando dove e perché il sistema posizionale fu vietato dai banchieri? Quando il sistema indo-arabico fu definitivamente introdotto nell'Europa occidentale?

Storia dei numeri razionali positivi

L'origine delle frazioni

Le frazioni esistono fin dall'antichità: già i babilonesi, gli egiziani e gli antichi greci usavano le frazioni. Possiamo quindi dire che i numeri razionali positivi sono i numeri più antichi dopo i numeri naturali (ricordiamo che i numeri razionali sono tutti i numeri che possono essere rappresentati con una frazione).

Rispondi alle seguenti domande: Quando sono state inventate le frazioni? Cosa sono i numeri razionali?

Differenza tra il concetto attuale di frazione e quello dell'antichità

Occorre fare una precisazione importante: oggi il termine "frazione" è sinonimo di "divisione", mentre nell'antichità questa relazione tra frazione e divisione non esisteva.

Spieghiamo meglio questo concetto con qualche esempio.

Oggi la frazione $\frac{3}{2}$ ci fa subito pensare alla divisione $3:2 = 1.5$; o, viceversa, il numero 0.3 ci fa pensare a $3:10$, ossia a $\frac{3}{10}$. Non è stato sempre così, perché i numeri non interi (cioè i numeri con la virgola) sono apparsi nella civiltà occidentale solamente alla fine del 1500 grazie al matematico **SIMONE STEVINO**. Prima, non esistendo i numeri con la virgola, i vari popoli usavano le frazioni senza concepirle come divisione tra numeratore e denominatore.

Rispondi alle seguenti domande: Quando e da chi sono stati inventati i numeri con la virgola?

Simone Stevino e la nascita dei numeri con la virgola

SIMONE STEVINO visse tra il 1548 e il 1620 in Olanda. Nel 1585 pubblicò un piccolo libro chiamato "Il decimo" nel quale sostenne l'uso quotidiano delle frazioni decimali (ossia le frazioni che hanno denominatore 10, 100, 1000, ecc.), perché permettevano di effettuare le quattro

³ Il nome Fibonacci significa "figlio di Bonacci" che era un ricco mercante dell'epoca. Fibonacci fu uno dei più grandi matematici del Medioevo. Egli è molto famoso anche per la cosiddetta "successione di Fibonacci". Egli nei suoi scritti introdusse anche l'uso di scrivere le frazioni con la stanghetta orizzontale (che aveva appreso dagli arabi), ma all'epoca questo uso non ebbe successo.

⁴ Nella mitologia greca Zefiro è la personificazione del vento di ponente.

operazioni su numeri non interi, con la stessa semplicità di come si facevano su numeri interi, senza dover ricorrere alle frazioni.

Ad esempio, per esprimere $1 + \frac{3}{5}$, egli lo trasformava in $1 + \frac{6}{10}$, e lo scriveva con 1 (0) 6 (1) (che

equivale al nostro 1.6). Ancora, per esprimere $2 + \frac{3}{4}$, lo trasformava in $2 + \frac{75}{100}$, e lo scriveva con

2 (0) 7 (1) 5 (2) (che equivale al nostro 2.75). Dopo pochi anni però si giunse all'attuale modo di indicare i numeri non interi, cioè separando con un punto o con una virgola la parte intera e la parte decimale. Con la nascita dei numeri con la virgola, fu possibile quindi fare le quattro operazioni con i numeri non interi, senza dover ricorrere alle frazioni.

Chiariamo che Stevino non fu l'inventore delle frazioni decimali, né il primo a farne uso in senso sistematico. Infatti le frazioni decimali venivano usate già nell'antica Cina, nell'Arabia medievale e nell'Europa del Rinascimento. Fra la gente comune però, e persino tra i matematici pratici, la conoscenza delle frazioni decimali si diffuse soltanto con Stevino.

Rispondi alle seguenti domande: Chi fu Simone Stevino e in quale periodo visse? Quali furono i meriti di Simone Stevino? Quali vantaggi offrono le frazioni decimali rispetto alle frazioni di diverso tipo? Chi fu l'inventore delle frazioni decimali?

I numeri negativi

Per quanto riguarda i numeri negativi, questi si sono affermati nella storia con difficoltà.

Un precursore dei numeri negativi è **DIOFANTO**, vissuto ad Alessandria d'Egitto nel III sec d.C. che è considerato uno dei "padri" dell'algebra. Per Diofanto le soluzioni dei problemi sono sempre numeri positivi, interi o razionali, mentre quelli negativi intervengono solo nei calcoli intermedi. Se invece un'equazione ha solo soluzioni negative, non deve essere considerata. Diofanto lavora con i numeri negativi, chiamandoli "deficienze" o "mancanze", e formula regole per estendere ad essa le operazioni, ossia le regole dei segni: <<deficienza moltiplicata per deficienza dà disponibilità (numero positivo), deficienza moltiplicata per disponibilità dà deficienza...>>.

Forse Diofanto, così come i matematici del Rinascimento pensava i numeri negativi e positivi come debiti e crediti, ma non lo dice.

Diofanto quindi non considera numeri le quantità negative, infatti considera assurde le equazioni che ammettono solo soluzioni negative.

Il merito di aver introdotto i numeri con segno va riconosciuto ai matematici indiani e in particolare a **BRAHMAGUPTA** (VII sec. d.C.). La sua opera più importante, rappresenta il primo esempio di aritmetica con i numeri negativi. In essa compaiono infatti regole pratiche per l'addizione di crediti e debiti, dove i debiti sono scritti preceduti da un punto per avvertire che il valore deve essere considerato negativo.

Gli Arabi, che hanno il merito di aver diffuso in Europa le scoperte degli Indiani, pur operando con i numeri negativi non li accettano però come soluzioni di problemi.

Nel Medio Evo, **FIBONACCI** è il primo in Italia a indicare i debiti con i numeri negativi; opera con essi ma non li accetta come soluzioni di problemi.

Alla fine del 1400, il matematico francese **NICOLAS CHUQUET**, sembra essere stato il primo matematico ad aver utilizzato lo zero e i numeri negativi come esponenti.

Altri matematici del Rinascimento mostrano di saper operare con i numeri negativi, ma per principio li rifiutano chiamandoli <<numeri assurdi>> e non li accettano come soluzioni di problemi.

Nel '600 **RENÉ DESCARTES (CARTESIO)**, l'inventore della geometria analitica, utilizza i numeri positivi e negativi per individuare coordinate positive e negative e sviluppa i calcoli con i numeri relativi, ma neanche lui accetta pienamente i numeri negativi, infatti non usa ascisse negative e continua a chiamare "false" le soluzioni negative delle equazioni.

I numeri negativi furono comunemente accettati solo alla fine del '700, ma si hanno esempi di resistenza all'uso dei numeri negativi fino a XIX secolo anche da parte di autorevoli matematici.

Rispondi alle seguenti domande: Chi è stato Diofanto e quando è vissuto? In quali casi Diofanto usa i numeri negativi e in quali casi non li usa? Come chiama Diofanto i numeri negativi? Quali regole legate ai numeri negativi formula Diofanto? Per Diofanto le quantità negative possono essere considerati numeri? A quale popolazione si attribuisce il merito di aver inventato i numeri negativi? Chi è stato Brahmagupta e quando è vissuto? Cosa di importante ci ha tramandato Brahmagupta nei suoi scritti? I numeri negativi sono pienamente accettati dagli arabi? Quando è vissuto matematico francese Nicolas Chuquet e quali sono i suoi meriti? Come vengono considerati e come vengono chiamati i numeri negativi nel Rinascimento? Vengono accettati pienamente i numeri negativi da Cartesio? Quando i numeri negativi furono comunemente accettati?

I numeri irrazionali

La scoperta dei numeri irrazionali viene attribuita ad **IPPASO DI METAPONTO** VI sec. a.C. discepolo di Pitagora⁵. Secondo la tradizione egli riuscì a dimostrare l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ ⁶, ma ciò non fece piacere a Pitagora in quanto questa scoperta metteva a repentaglio le basi della sua filosofia.

Infatti, secondo il pensiero pitagorico, il concetto di numero è alla base di tutto l'universo: l'essenza di tutte le cose è spiegabile mediante i numeri o rapporti numerici. Gli antichi greci però consideravano numeri solamente gli interi, quindi tutte le cose potevano essere spiegate o mediante numeri interi o mediante rapporti di numeri interi (frazioni). La scoperta di Ippaso di Metaponto comportava che il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato non si può esprimere con una frazione (si calcola facilmente con il teorema di Pitagora⁷ che il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato è $\sqrt{2}$ ⁸ che è un numero irrazionale). Il discepolo di Pitagora scoprì quindi le *grandezze incommensurabili*, ossia coppie di segmenti in cui il rapporto tra le loro lunghezze non può essere espresso mediante una frazione (la diagonale e il lato di un quadrato sono appunto due grandezze incommensurabili).

Questa scoperta, come si è detto, demoliva la fede pitagorica nei numeri interi. Si trattava della scoperta che, all'interno della geometria stessa, i numeri interi e i loro rapporti non sono in grado

⁵ **PITAGORA** (Samo, circa 575 a.C. – Metaponto, circa 495 a.C.), fu un grande matematico e filosofo ed era visto dai contemporanei anche come un profeta e un mistico. Egli, fece viaggi in Egitto, a Babilonia e forse in India e durante queste sue peregrinazioni non solo raccolse informazioni matematiche e astronomiche, ma fece proprie anche molte credenze religiose. Ritornato nel mondo greco, Pitagora si stabilì a Crotone e qui fondò una società segreta a sfondo mistico-filosofico, con la particolarità data dalla convinzione che la conoscenza e in particolare la conoscenza della matematica fosse uno strumento di purificazione, nel senso che l'ignoranza è ritenuta una colpa da cui ci si libera con il sapere. Per questa ragione Pitagora e i suoi adepti (detti pitagorici) dedicavano molte energie allo studio della matematica. Non a caso il termine "matematica" è stato coniato proprio con Pitagora e significa "ciò che si impara".

I pitagorici seguivano un rigoroso codice di condotta, per esempio: ai membri veniva imposta una dieta vegetariana, in quanto essi credevano nella trasmigrazione delle anime, con la conseguente preoccupazione che un animale macellato potesse essere la nuova dimora dell'anima di un amico morto, inoltre, per qualche ragione, era strettamente vietato mangiare fagioli.

⁶ Secondo altri, invece, dimostrò l'irrazionalità del rapporto tra la diagonale e il lato di un pentagono regolare (questo rapporto è uguale a $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$). Questo è un numero molto importante nella storia della matematica: viene detto numero aureo e dà origine alla

sezione aurea di un segmento, che ha avuto notevoli ripercussioni nella storia dell'arte.

⁷ Il famoso teorema attribuito a Pitagora era già noto ai babilonesi. Probabilmente Pitagora o i pitagorici furono i primi a trovarne una dimostrazione.

⁸ Si noti che la diagonale divide un quadrato in due triangoli rettangoli. Se denotiamo con x la lunghezza del lato del quadrato e con d la lunghezza della diagonale, notiamo che per il teorema di Pitagora $d^2 = x^2 + x^2 \rightarrow d = \sqrt{2x^2} \rightarrow d = x\sqrt{2}$.

neppure di spiegare semplici proprietà fondamentali (come il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato).

Secondo la leggenda, Pitagora volle tenere segreta la scoperta, ma Ippaso la divulgò e per questo fu annegato. Come scherzo del destino, in seguito, Pitagora fu ucciso proprio a Metaponto, il paese natale del povero Ippaso.

Il matematico greco Euclide (367 a.C. ca. - 283 a.C.) ci ha tramandato una famosa dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

Solo nel 19° secolo si ha una vera definizione di numero irrazionale, diversa da quella che abbiamo dato noi, in quanto la nostra è intuitiva ma non rigorosa.

Rispondi alle seguenti domande: Chi e in che epoca (secondo la tradizione) ha scoperto i numeri irrazionali? Chi è stato Pitagora e in che epoca è vissuto? Perché (secondo la tradizione) Pitagora temeva molto il fatto che la scoperta dei numeri irrazionali fosse divulgata in giro? Come pervenne Ippaso di Metaponto alle sue scoperte? Cosa sono le grandezze incommensurabili? Chi ha inventato il termine "matematica"? Cosa significava il termine "matematica" quando fu coniato? Cosa è il numero aureo? Quanto vale il rapporto tra la diagonale e il lato di un pentagono regolare? Quanto vale il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato? Come si calcola il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato? Cosa ci ha tramandato Euclide relativamente alla radice quadrata di 2? Quando si ebbe una definizione rigorosa di numero irrazionale?

I numeri complessi

L'insieme dei numeri complessi è un insieme numerico "più ricco" dell'insieme dei numeri reali, in quanto contiene anche le radici dei numeri negativi, che invece tra i numeri reali non esistono.

In particolare, le radici quadrate dei numeri negativi vengono denominate "numeri immaginari" e la radice quadrata di -1 viene chiamata "unità immaginaria" e viene denotata con la lettera "i".

La somma tra un numero reale e un numero immaginario viene detto *numero complesso*.

I numeri complessi fecero la prima comparsa nel '500 quando i matematici usavano fare le radici dei numeri negativi per la risoluzione delle equazioni di 3° e di 4° grado.

Al matematico bolognese RAFAEL BOMBELLI (1526-1573) spetta il merito di aver introdotto nella matematica i numeri complessi e le regole di calcolo con essi; oltre ad aver completato la teoria delle equazioni di terzo grado.

Fu **CARTESIO** che chiamò "numeri immaginari" le radici dei numeri negativi.

La teoria dei numeri complessi si sviluppò pienamente nel '700 e all'inizio dell' '800⁹.

Rispondi alle seguenti domande: Cosa è consentito fare con i numeri complessi che non è consentito fare con i numeri reali? Cosa sono i numeri immaginari? Cosa è l'unità immaginaria e come si denota? Come viene detto un numero formato dalla somma di un numero reale e un numero immaginario? Chi inventò i numeri complessi e in che epoca? Perché furono inventati i numeri complessi? Chi ha coniato l'espressione "numeri immaginari"? Chi inventò la rappresentazione grafica dei numeri complessi e in che epoca?

⁹ Nel '700 i numeri complessi si svilupparono grazie a **ABRAHAM DE MOIVRE** e a **LEONHARD EULER** (detto Eulero in Italia) e più tardi, nell' '800 con **CARL FRIEDRICH GAUSS** che diede una rappresentazione geometrica dei numeri complessi, rappresentandoli su un piano cartesiano, detto "piano di Gauss".

Riepilogo

- 1) I numeri naturali sono stati i primi ad apparire, fin dalla preistoria.
- 2) I numeri razionali (positivi) esistono fin dall'antichità: già i babilonesi, gli egiziani e gli antichi greci usavano le frazioni. Possiamo quindi dire che i numeri razionali positivi sono i numeri più antichi dopo i numeri naturali.
- 3) Nel VI secolo a.C. tra i greci furono scoperti i numeri irrazionali (la cui scoperta viene attribuita a Ippaso di Metaponto). Il matematico greco Euclide (367 a.C. ca. - 283 a.C.) ci ha tramandato una famosa dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$.
- 4) A partire dal VII secolo d.C. tra gli indiani (con Brahmagupta) e poi tra gli arabi si hanno le prime testimonianze scritte del numero 0.
- 5) Nel III secolo d.C. ad Alessandria d'Egitto visse il matematico greco Diofanto che fu un precursore dei numeri negativi (che chiamava "deficienze" o "mancanze"), ma il merito di aver introdotto i numeri con il segno va al matematico indiano Brahmagupta (VII secolo d.C.).
- 6) Nel XVI secolo comparvero i numeri immaginari, come radici di numeri negativi, per la risoluzione delle equazioni di 3° e di 4° grado. Il termine "immaginari" fu introdotto nel '600 da Cartesio. Ricordiamo che la somma di un numero immaginario e di un numero reale viene detto "numero complesso".